

NGUYỄN QUỐC BẢO
TRẦN NHẤT DŨNG

PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN LÝ THUYẾT VÀ LẬP TRÌNH TẬP 1



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

NGUYỄN QUỐC BẢO - TRẦN NHẤT DŨNG

Biên soạn

PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN LÝ THUYẾT VÀ LẬP TRÌNH

TẬP MỘT

(In lần thứ hai có điều chỉnh và bổ sung)

- ☛ Dùng cho sinh viên, học viên cao học, nghiên cứu sinh chuyên ngành cơ, kỹ thuật thuộc khối ngành xây dựng, kiến trúc, giao thông, thủy lợi, mỏ địa chất...
- ☛ Thích hợp cho mọi đối tượng quan tâm đến lý thuyết và kỹ thuật lập trình với phần tử hữu hạn.



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
HÀ NỘI

PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

LÝ THUYẾT VÀ LẬP TRÌNH

TẬP MỘT

Biên soạn : PGS.TS. Nguyễn Quốc Bảo
PGS.TS. Trần Nhất Dũng

Chịu trách nhiệm xuất bản : PHẠM NGỌC KHÔI
Biên tập : TS. NGUYỄN HUY TIẾN
Trình bày bìa : XUÂN DŨNG

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
70 TRẦN HƯNG ĐẠO - HÀ NỘI

In 200 cuốn, khổ 19×27cm, tại Xí nghiệp In NXB Văn hóa Dân tộc
Số đăng ký kế hoạch xuất bản: 235-2012/CXB/285.1-13/KHKT-6/3/2012
Quyết định xuất bản số: 169 /QĐXB-NXBKHKT- 10/8/2012
In xong và nộp lưu chiểu quý III năm 2012.

Lời nói đầu

Phương pháp phần tử hữu hạn (PP PTHH) là một phương pháp tính đã được hình thành và phát triển trong vòng vài chục năm trở lại đây, nhưng do yêu cầu tính toán của một bài toán thực tế thường đòi hỏi một khối lượng tính toán rất lớn, do vậy việc ứng dụng PP PTHH trước đây gặp không ít khó khăn. Chỉ cho đến khi có sự xuất hiện của các máy tính cá nhân (PC) cùng với những tiến bộ to lớn của công nghệ thông tin trong những năm gần đây mới thật sự cho phép phương pháp tính này được ứng dụng một cách phổ biến và rộng rãi. Cùng với việc tính giải các đại lượng cơ học của kết cấu như biến dạng; ứng suất; chuyển vị ... PP PTHH còn là cơ sở của lĩnh vực mô phỏng hoá trong các bài toán thiết kế. Thông qua sự phát triển của kỹ thuật đồ hoạ trên máy tính người ta có thể mô phỏng hoá các hoạt động của kết cấu; giả định vô số các phương án tính toán để từ đó chọn lựa giải pháp tối ưu. Điều này cho phép giảm chi phí và thời gian thực hiện các thí nghiệm theo phương pháp truyền thống. Cùng với sự tiến bộ của khoa học kỹ thuật máy tính đã trở thành một bộ phận quen thuộc và không thể thiếu trong các hoạt động nghiên cứu cũng như ứng dụng thực tiễn. Theo đó, cũng ngày càng xuất hiện nhiều hơn các chương trình tính toán sử dụng PP PTHH với phạm vi ứng dụng ngày càng phong phú và đa dạng : tính toán kết cấu; tính toán nhiệt; tính tuổi thọ công trình; mô phỏng; tối ưu hoá .v.v. Đối với thực tế ở Việt Nam PP PTHH cũng đã từng được nghiên cứu và ứng dụng khoảng vài chục năm trở lại đây với số lượng người tham gia nghiên cứu ngày càng tăng nhanh, phạm vi ứng dụng ngày càng phong phú, đa dạng.

Để đáp ứng nhu cầu học tập và nghiên cứu PP PTHH - nắm bắt các khía cạnh, cốt lõi của nó theo một trình tự LOGIC và tạo điều kiện cho bạn đọc có thể vận dụng nó để lập trình tìm lời giải cho một bài toán cụ thể, chúng tôi đã cố gắng tìm hiểu và biên soạn tài liệu này. Đây là tài liệu được biên soạn chủ yếu phục vụ các đối tượng nghiên cứu là sinh viên, kỹ sư thuộc các ngành cơ kỹ thuật, kết cấu công trình, cơ khí, giao thông, thuỷ lợi, mỏ địa chất... Ngoài ra sách cũng hỗ trợ rất tốt cho các đối tượng là nghiên cứu sinh, học viên cao học,

thuộc khối Kỹ thuật công trình và Cơ kỹ thuật - Là các đối tượng đã được trang bị tốt các kiến thức về lý thuyết ma trận, về đại số tuyến tính và tin học đại cương. Đây là một cuốn sách được trình bày theo kiểu giáo trình với các diễn giải lý thuyết cô đọng và dễ hiểu, có phần ví dụ minh họa và giải thuật để người đọc có thể vận dụng.

Toàn bộ nội dung sách được trình bày trong tổng số 12 chương, xuất bản thành 2 tập.

Tập 1 : gồm 7 chương trong đó 5 chương đầu dành cho việc nghiên cứu các lý thuyết chung của PP PTHH. Chương 6 là cấu trúc và giải thuật của một chương trình tính minh họa. Chương 7 trình bày các lý thuyết tính giải bài toán thanh phẳng (2D) và thanh không gian (3D).

Tập 2 : gồm 5 chương trình bày các dạng bài toán điển hình của PP PTHH : bài toán phẳng; bài toán ứng suất 3 chiều; tấm chịu uốn; bài toán kết cấu vỏ v.v.. và cuối cùng là phần mã nguồn của toàn bộ chương trình tính theo các lý thuyết đã trình bày trong các chương trước.

Để tiện cho bạn đọc trong quá trình tìm hiểu sách và liên hệ vận dụng lập trình trên máy tính, trong toàn bộ sách này hệ thống các ký hiệu, quy ước về hệ tọa độ; về ma trận; về vector v.v.. được trình bày theo đúng "chuẩn" của cơ học kết cấu (ví dụ: $\{ A \}$ - là vector A ; $[K]$ - là ma trận K). Riêng phần thể hiện dấu phẩy động, thống nhất trong toàn bộ tài liệu được thể hiện theo chuẩn Anh - Mỹ, nghĩa là sử dụng dấu chấm (.) thay cho dấu phẩy (,). Cách thể hiện này chủ yếu tạo tính tiện dụng khi liên hệ lập trình và đối chiếu kết quả trên PC, vì hiện nay cách thể hiện số thực trên hầu hết các máy tính vẫn là lối thể hiện kiểu Anh - Mỹ (ví dụ: viết theo kiểu Việt Nam thì số Pi có trị số như sau $\text{Pi}=3,14159265$; còn viết theo kiểu Anh - Mỹ thì $\text{Pi}=3.14159265$).

Sau lần xuất bản thứ nhất, năm 2003, sách đã được độc giả gần xa nồng nhiệt đón nhận và cổ vũ. Sách cũng đã chính thức được nhiều trường đại học trong cả nước chọn làm tài liệu giảng dạy môn học PTHH. Đáp lại sự yêu mến và động viên của độc giả, chúng tôi cho tái bản 02 tập sách này. Trong lần xuất bản này chúng tôi có hiệu chỉnh và bổ sung một số thông tin cho phù hợp với sự phát triển của công nghệ thông tin những năm gần đây. Hy vọng là các nội dung thông tin trong 02 tập sách này vẫn là món quà hữu ích cho các độc giả.

Tuy nhiên do kiến thức có hạn, nội dung cần trình bày quá rộng lớn và phức tạp, chắc chắn ngay cả lần xuất bản này cũng sẽ không thể tránh khỏi các thiếu sót đáng tiếc, xin được thông cảm và rất mong nhận được các ý kiến đóng góp xây dựng của bạn đọc gần xa.

NGƯỜI BIÊN SOẠN

MỤC LỤC

	Trang
Lời nói đầu	3
Chương 1 : Nhập môn	7
1.1. Điều kiện cân bằng	7
1.2. Điều kiện biên	9
1.3. Xấp xỉ nghiệm	10
1.3.1. Xấp xỉ hàm	10
1.3.2. Phương pháp sai phân hữu hạn	14
1.3.3. Phương pháp phần tử hữu hạn	18
Chương 2 : Các nguyên lý cơ bản của cơ học kết cấu	21
2.1. Các điều kiện cân bằng	21
2.2. Quan hệ biến dạng và chuyển vị	25
2.3. Các quan hệ vật liệu tuyến tính	27
2.4. Nguyên lý công khả dĩ	33
2.5. Các nguyên lý năng lượng	41
2.6. Áp dụng cho phương pháp phần tử hữu hạn	54
Chương 3 : Tính chất phần tử	55
3.1. Mô hình chuyển vị	56
3.2. Quan hệ giữa bậc tự do nút và các tọa độ tổng quát	58
3.3. Yêu cầu hội tụ	59
3.4. Hệ tọa độ "tự nhiên"	61
3.5. Hàm dáng	66
3.6. Ứng suất và biến dạng phần tử	83
3.7. Ma trận độ cứng phần tử	85
3.8. Quy rút tĩnh học	91
Chương 4 : Phần tử đồng tham số	93
4.1. Phần tử đồng tham số hai chiều	94
4.2. Tính ma trận độ cứng phần tử đồng tham số	102
4.2.1. Tích phân số	103
4.2.2. Tính tích phân số trên máy	104
4.2.3. Tính toán nhanh độ cứng phần tử	113
4.3. Tiêu chuẩn hội tụ cho phần tử đồng tham số	115
Chương 5 : Phương pháp độ cứng trực tiếp	117
5.1. Sắp xếp phần tử - phương pháp độ cứng trực tiếp	119
5.2. Khử Gauss và phép phân tích ma trận	127

5.2.1.	Phân tích ma trận Choleski ($[L][D][L]^T$)	131
5.2.2.	Các bước cơ bản trong phân tích PTHH	139
Chương 6 : Chương trình PASSFEM		143
6.1.	Chương trình chính	143
6.2.	Chương trình con PASSIN	146
6.3.	Chương trình con FELIB	150
6.4.	Chương trình con COLUMH	153
6.5.	Chương trình con CADNUM	156
6.6.	Chương trình con PASSEM	157
6.7.	Chương trình con PASOLV	159
6.8.	Chương trình con PASLOD	160
6.9.	Chương trình con DISP	161
6.10.	Ghép các chương trình	162
6.11.	Nhập số liệu	166
Chương 7 : Phân tích kết cấu khung		169
7.1.	Phần tử dàn 2 chiều	170
7.2.	Phần tử dàn 3 chiều	177
7.3.	Phần tử dầm 2 chiều	179
7.4.	Phần tử thanh 3 chiều	199
7.5.	Biến dạng trượt trong dầm	211
7.6.	Phần tử thanh bù BEAM2	222
7.7.	Chương trình con cho phần tử dàn 3 chiều	226
7.8.	Chương trình con cho phần tử thanh 3 chiều	228
7.9.	Thủ tục cho các phần tử biên	231
Tài liệu tham khảo		235



1

Nhập môn

Đối tượng nghiên cứu của phương pháp phần tử hữu hạn là tìm lời giải số cho các bài toán của lý thuyết trường nói chung và của cơ học vật rắn biến dạng nói riêng. Phương pháp phần tử hữu hạn được áp dụng đặc biệt thành công trong lĩnh vực cơ học vật rắn biến dạng, trong đó các ẩn số cần tìm là chuyển vị, biến dạng, ứng suất tại mỗi điểm bất kỳ trong kết cấu.

Trong không gian 3 chiều tổng quát, các ẩn số trên tạo lên các trường chuyển vị, biến dạng và ứng suất và bài toán đặt ra là các bài toán của lý thuyết trường, trong đó các ẩn số cần tìm trên được gọi chung là các biến trường. Để có thể nhận lời giải, trước hết cần xác định các quan hệ cơ học (các điều kiện ràng buộc) giữa chúng cùng với ngoại tải tác dụng lên cơ hệ. Các điều kiện ràng buộc thường được phân thành :

- . Điều kiện trường : điều kiện viết cho trường các thông số bên trong kết cấu.
- . Điều kiện biên viết cho trường các thông số trên biên của kết cấu (với các bài toán động còn cần tới các điều kiện đầu).

1.1. ĐIỀU KIỆN CÂN BẰNG

Điều kiện cân bằng, về toán, có thể hình thành theo các phương pháp của phương trình vật lý - toán (phương trình đạo hàm riêng). Điều kiện cân bằng cũng có thể hình thành bằng cách sử dụng phép tính biến phân.

1.1.1. Phương trình đạo hàm riêng

Phương trình đạo hàm riêng mô tả điều kiện trường của cơ hệ thường được hình thành từ các điều kiện cân bằng tĩnh học và điều kiện liên tục của chuyển vị.

Các phương trình đạo hàm riêng này cũng có thể nhận được bằng cách sử dụng phương trình **Euler-Lagrange** của nguyên lý biến phân như sẽ trình bày trong chương 2.

Chẳng hạn trong sức bền vật liệu, bài toán uốn của dầm được mô tả bằng phương trình vi phân bậc 4.

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = P \quad (1.1)$$

trong đó w - độ võng của dầm, là nghiệm cần tìm của phương trình trên.

Trong trường hợp của tấm mỏng đẳng hướng, phương trình đạo hàm riêng viết cho biến w - chuyển vị đứng của tấm, có dạng :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{P}{D} \quad (1.2)$$

Với :

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$$

E - môđun đàn hồi;

μ - hệ số poisson;

h - độ dày tấm.

1.1.2. Tiếp cận biến phân

Ở phương pháp tiếp cận này, việc giải bài toán dẫn tới tìm cực trị của các phiếm hàm mô tả sự làm việc của kết cấu. Phiếm hàm mô tả ở đây có thể là tổng thế năng hay năng lượng bù của cơ hệ. Trong biến phân, như ta đã biết để tìm cực trị phiếm hàm ta cho biến phân bậc nhất bằng không. Áp dụng cho cơ hệ, điều này dẫn tới phương trình cân bằng hoặc phương trình liên tục của bài toán, trong đó các biến trường phải thoả mãn. Chẳng hạn thế năng của tấm đẳng hướng, chịu tải phân bố đều cường độ p được cho bởi phiếm hàm :

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{Eh^3}{24(1-\mu^2)} \iint \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\mu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right] dx dy \\ & - \iint w p dx dy \end{aligned} \quad (1.3)$$